

Министерство науки и высшего образования РФ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

Б1.В.03 Алгебраическая геометрия и алгебраические  
группы

наименование дисциплины (модуля) в соответствии с учебным планом

Направление подготовки / специальность

01.04.01 Математика

Направленность (профиль)

01.04.01.02 Алгебра, логика и дискретная математика

Форма обучения

очная

Год набора

2022

Красноярск 2022

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Программу составили \_\_\_\_\_

Доктор физико-математических наук, Профессор, Нужин Яков

Нифантьевич;;;

должность, инициалы, фамилия

## 1 Цели и задачи изучения дисциплины

### 1.1 Цель преподавания дисциплины

Целью дисциплины «Алгебраическая геометрия и алгебраические группы» является изучение основ интенсивно развивающейся теории алгебраических групп и алгебраической геометрии, а также приложения этих теорий.

### 1.2 Задачи изучения дисциплины

Предметом являются нетеровы кольца, кольцо многочленов  $K[X]$  от  $n$  переменных над алгебраически замкнутым полем  $K$ . Аффинное пространство  $K^n$ , его аффинные многообразия и два основных соответствия аффинных многообразий в  $K^n$  и идеалов в  $K[X]$ . Топология Зарисского на аффинном пространстве и на аффинном многообразии  $V$ . Теоремы Гильберта о базисе и о корнях (нулях). Биjectивность соответствия между аффинными многообразиями в  $K^n$  и радикальными идеалами в  $K[X]$ . Проективное пространство  $P^n(K)$  и проективное многообразие, их топология Зарисского, однородные полиномы, однородные множества. Биjectия проективных многообразий на однородные радикальные идеалы. Однородное координатное кольцо на  $V$ , его градуированность и конечное покрытие открытыми множествами, изоморфными аффинным многообразиям.

Произведение нетеровых топологических пространств и предмногообразий. Алгебраические многообразия, их морфизмы и изоморфизмы. Алгебраичность аффинных и проективных многообразий, замкнутых, открытых и локально замкнутых подмножеств алгебраического многообразия  $X$ , размерность неприводимого алгебраического многообразия  $X$ .

Алгебраические группы, их гомоморфизмы и изоморфизмы. Алгебраичность замкнутых подгрупп, прямых произведений и классических линейных групп над  $K$ . Замкнутые подгруппы в  $GL_n(K)$ , аффинные и линейные алгебраические группы. Связная компонента единицы линейной алгебраической группы  $G$ , ее замкнутость и нормальность, конечность индекса. Признак замкнутости произведения двух замкнутых подгрупп. Связность алгебраической группы, порожденной замкнутыми связными подгруппами. Гомоморфизмы в  $GL_n(K)$  и рациональные представления алгебраической группы, совпадение ее размерности с суммой размерностей ядра и образа гомоморфизма.

### 1.3 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Запланированные результаты обучения по дисциплине
	<b>ПК-1: Способен применять в научно-исследовательской деятельности знания математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий</b>

<p>ПК-1.1: Обладает достаточными фундаментальными теоретическими и практическими знаниями математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий для проведения в конкретной области профессиональной деятельности</p>	<p>Основные теории, историю и методы изучаемой дисциплины  Анализировать факты и устанавливать закономерности в вопросах изучаемой дисциплины, ориентироваться в круге основных проблем изучаемой дисциплины  Навыками самостоятельного получения и анализа информации в изучаемой дисциплине</p>
<p>ПК-1.2: Решает научные задачи в соответствии с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой</p>	<p>Основные положения и методы изучаемой дисциплины  Применять знания и методы к решению задач в научно-исследовательской деятельности  Основными методами и программными продуктами для достижения поставленной цели</p>

#### **1.4 Особенности реализации дисциплины**

Язык реализации дисциплины: Русский.

Дисциплина (модуль) реализуется без применения ЭО и ДОТ.

## 2. Объем дисциплины (модуля)

Вид учебной работы	Всего, зачетных единиц (акад.час)	е
		1
<b>Контактная работа с преподавателем:</b>	<b>1,06 (38)</b>	
занятия лекционного типа	0,53 (19)	
практические занятия	0,53 (19)	
<b>Самостоятельная работа обучающихся:</b>	<b>0,94 (34)</b>	
курсовое проектирование (КП)	Нет	
курсовая работа (КР)	Нет	
<b>Промежуточная аттестация (Экзамен)</b>	<b>1 (36)</b>	

### 3 Содержание дисциплины (модуля)

#### 3.1 Разделы дисциплины и виды занятий (тематический план занятий)

		Контактная работа, ак. час.							
№ п/п	Модули, темы (разделы) дисциплины	Занятия лекционного типа		Занятия семинарского типа				Самостоятельная работа, ак. час.	
				Семинары и/или Практические занятия		Лабораторные работы и/или Практикумы			
		Всего	В том числе в ЭИОС	Всего	В том числе в ЭИОС	Всего	В том числе в ЭИОС	Всего	В том числе в ЭИОС
<b>1. Модуль I.</b>									
	1. Введение в алгебраическую геометрию по статье А.И.Мальцева «Группы и другие алгебраические системы, 1956 г».	1							
	2. Начальные определения теории колец: кольцо, идеал, порождающее множество идеала, кольцо главных идеалов, делители нуля. Лемма о высшем члене произведения двух полиномов в кольце полиномов $n$ переменных и ее следствие.	2							
	3. Факториальные кольца. Примеры нефакториальных числовых колец с разложением на простые множители.	2							
	4. Простые и максимальные идеалы. Лемма о двух эквивалентных условиях простоты идеала. Теорема о фактор-кольце по максимальному идеалу. Теорема о включении любого идеала в максимальный идеал в коммутативном кольце с единицей.	2							

5. Нетеровы кольца. Теорема об эквивалентных условиях нетеровости. Теорема Гильберта о базисе и ее следствия.	2							
6. Аффинные многообразия, радикальные кольца. Теорема о непустоте множества нулей любого собственного идеала кольца $K[x_1, \dots, x_n]$ .	2							
7. Введение в алгебраическую геометрию по статье А.И.Мальцева «Группы и другие алгебраические системы, 1956 г».			1					
8. Начальные определения теории колец: кольцо, идеал, порождающее множество идеала, кольцо главных идеалов, делители нуля. Лемма о высшем члене произведения двух полиномов в кольце полиномов $n$ переменных и ее следствие.			2					
9. Факториальные кольца. Примеры нефакториальных числовых колец с разложением на простые множители.			2					
10. Простые и максимальные идеалы. Лемма о двух эквивалентных условиях простоты идеала. Теорема о фактор-кольце по максимальному идеалу. Теорема о включении любого идеала в максимальный идеал в коммутативном кольце с единицей.			2					
11. Нетеровы кольца. Теорема об эквивалентных условиях нетеровости. Теорема Гильберта о базисе и ее следствия.			2					
12. Аффинные многообразия, радикальные кольца. Теорема о непустоте множества нулей любого собственного идеала кольца $K[x_1, \dots, x_n]$ .			2					

13. Группы преобразований линейного пространства, индуцирующие коллинеации проективной геометрии. Классические группы. Теорема о полулинейном преобразовании, индуцирующем изоморфизм проективных геометрий.								6	
14. Основная теорема проективной геометрии. Свободный $K$ -модуль, унимодулярный вектор, проективность. Обобщенная основная теорема. Группы $PGL(V)$ , $PGL(V)$ , $PSL(V)$ .								4	
15. Квадратичные формы и квадратики проективных пространств. Схемы квадратичных форм поля и кольца. Гипотезы об элементарных типа $QF$ - схем.								2	
16. Принцип дуальности. Теорема о порядке проективной плоскости.								4	
17. Теорема Брука-Райзера. Теорема о связи аффинной и проективной плоскости.								4	
<b>2. Модуль II.</b>									
1. Теорема Гильберта о нулях. Теорема о взаимно однозначном соответствии точек аффинного пространства и максимальных идеалов кольца $K[x_1, \dots, x_n]$ .	2								
2. Топологические пространства. Примеры. Топология Зарисского.	2								
3. Аффинные алгебраические группы. Примеры.	2								
4. Связная компонента единицы линейной алгебраической группы $G$ , ее замкнутость и нормальность, конечность ее индекса.	2								



5. Теорема Гильберта о нулях. Теорема о взаимно однозначном соответствии точек аффинного пространства и максимальных идеалов кольца $K[x_1, \dots, x_n]$ .			2					
6. Топологические пространства. Примеры. Топология Зарисского.			2					
7. Аффинные алгебраические группы. Примеры.			2					
8. Связная компонента единицы линейной алгебраической группы $G$ , ее замкнутость и нормальность, конечность ее индекса.			2					
9. Координатное кольцо $K[V]$ и его характеристика, неприводимые многообразия и неприводимые компоненты, связь неприводимости $V$ и простоты идеала $J(V)$ , пучок $K$ -значных функций на $V$ .							2	
10. Координатное кольцо $K[V]$ и его характеристика, неприводимые многообразия и неприводимые компоненты, связь неприводимости $V$ и простоты идеала $J(V)$ , пучок $K$ -значных функций на $V$ .							2	
11. Алгебраическое многообразие размерности 1. Плоские аффинные алгебраические кривые. Необходимость учёта бесконечно удалённых точек. Особенности алгебраических кривых. Примеры.							2	
<b>3. Модуль III.</b>								
1. Алгебраические группы, их гомоморфизмы и изоморфизмы. Алгебраичность замкнутых подгрупп, прямых произведений и классических линейных групп над $K$ .							2	

2. Признак замкнутости произведения двух замкнутых подгрупп. Связность алгебраической группы, порожденной замкнутыми связными подгруппами.							2	
3. Теорема Шевалле о классификации простых алгебраических групп.							2	
4. Гомоморфизмы в $GL_n(K)$ и рациональные представления алгебраической группы, совпадение ее размерности с суммой размерностей ядра и образа гомоморфизма.							2	
Всего	19		19				34	

#### **4 Учебно-методическое обеспечение дисциплины**

##### **4.1 Печатные и электронные издания:**

1. Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии: монография (Москва: МЦНМО).
2. Хамфри Д. Е., Платонов В. П. Линейные алгебраические группы: пер. с англ.(Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит.).
3. Стейнберг Р., Кириллов А. А. Лекции о группах Шевалле: перевод с английского(Москва: Мир).
4. Горенштейн Д. Конечные простые группы: введение в их классификацию: перевод с английского(Москва: Мир).

##### **4.2 Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение, в том числе отечественного производства (программное обеспечение, на которое университет имеет лицензию, а также свободно распространяемое программное обеспечение):**

1. Специальное программное обеспечение в учебном процессе по данной дисциплине не используется.

##### **4.3 Интернет-ресурсы, включая профессиональные базы данных и информационные справочные системы:**

1. Для самостоятельной работы у студентов должен быть доступ к электронному каталогу НБ СФУ.

#### **5 Фонд оценочных средств**

Оценочные средства находятся в приложении к рабочим программам дисциплин.

#### **6 Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Методика проведения занятий допускает как использование технических средств (проекторы, интерактивные доски), так и классические аудиторные занятия, обеспечиваемые стандартными материально-техническими средствами.

Освоение дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, в зависимости от нозологий, осуществляется с использованием средств обучения общего и специального назначения.